

利用长短期记忆神经网络的改进 POD-Galerkin 降阶模型及其在流场预测中的应用

张译文, 王志恒, 邱睿贤, 席光

(西安交通大学能源与动力工程学院, 710049, 西安)

摘要: 针对标准 POD-Galerkin 降阶模型在流场快速预测中存在误差而导致精度不高的问题, 提出了一种利用长短期记忆神经网络的改进 POD-Galerkin 降阶模型。使用本征正交分解对流场进行降维, 投影得到低维降阶模型, 引入两个长短期记忆神经网络, 建立从 POD-Galerkin 降阶模型到实际 POD 模态时间系数之间的修正映射、低阶模态时间系数与高阶模态时间系数之间的扩展映射, 分别用于消除标准 POD-Galerkin 降阶模型的误差累积和扩展降阶模型的阶数, 从而实现物理驱动与数据驱动混合的流动降阶模型的构建。将改进 POD-Galerkin 降阶模型应用于二维圆柱绕流的流场预测, 通过与原始标准 POD-Galerkin 降阶模型的对比, 分析了所提模型的精度和计算速度。结果表明: 添加神经网络修正项后的降阶模型相较于标准 POD-Galerkin 降阶模型, 有效提升了降阶模型的精度, 预测各阶模态时间系数的均方根误差能够减小 1~2 个数量级, 预测的流场更接近原始流场; 在预测相同阶数的情况下, 计算时间显著减小, 基于 4 阶和 6 阶扩展的 8 阶改进降阶模型相较于原始 8 阶 POD-Galerkin 降阶模型预测速度分别提高了约 56% 和 25%。

关键词: 本征正交分解; 降阶模型; 神经网络; 流场预测

中图分类号: O357.1 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202402002 **文章编号:** 0253-987X(2024)02-0012-10

Improved POD-Galerkin Reduced Order Model with Long Short-Term Memory Neural Network and Its Application in Flow Field Prediction

ZHANG Yiwen, WANG Zhiheng, QIU Ruixian, XI Guang

(School of Energy and Power Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Aiming at the issue of low accuracy in rapid prediction of flow field caused by errors in the standard POD-Galerkin reduced order model, an improved POD-Galerkin model using long short-term memory (LSTM) neural networks is proposed. In this method, based on the reduced order model obtained by dimensionality reduction and projection of the flow field using proper orthogonal decomposition (POD), two LSTM neural networks are introduced to establish a corrective mapping from the POD-Galerkin model to the actual POD coefficients, and an expansion mapping between the low-order mode time coefficients and the high-order mode time coefficients, so as to eliminate the error accumulation of the standard POD-Galerkin model and extend the order of reduced order model. This method enables the construction of a hybrid reduced order model that combines physics-driven and data-driven approaches. The improved POD-Galerkin

收稿日期: 2023-06-25。 作者简介: 张译文(1998—), 男, 硕士生; 王志恒(通信作者), 男, 副教授, 博士生导师。 基金项目: 国家重大科技专项资助项目(2017-II-0004-0016); 国家自然科学基金资助项目(52176044)。

网络出版时间: 2023-08-29 网络出版地址: <https://link.cnki.net/urlid/61.1069.T.20230829.1144.006>

model is applied to flow field prediction of a two-dimensional flow around a cylinder. A comparison with the original standard POD-Galerkin model is performed to analyze the model accuracy and computational speed. The results show that, with the addition of neural network correction terms, the accuracy of the reduced order model is effectively improved compared with the standard POD-Galerkin model. The root mean square error of the predicted mode time coefficients is reduced by one to two orders of magnitude compared with the original model, and the predicted flow field is closer to the original flow field. The improved model achieves a significant reduction in computation time while predicting the same order. The improved 8-order improved reduced order model based on 4- and 6-order expansions improves the prediction speed by approximately 56% and 25%, respectively, compared with the original 8-order POD-Galerkin model.

Keywords: proper orthogonal decomposition; reduced order model; neural network; flow prediction

由 Navier-Stokes (N-S) 方程所描述的流体流动具有非线性和多尺度特征,其固有的复杂性使得预测流体流动十分困难。计算流体动力学 (computational fluid dynamics, CFD) 方法可以通过基于偏微分方程的全阶模型 (full order model, FOM) 提供对流体流动的准确预测,但是计算量可能较大,无法做到实时预测。因此,构建低成本流场降阶模型 (reduced order model, ROM) 有很高的应用潜力^[1]。流场降阶模型是指从 CFD 或实验得到的数据集而构建的低维数学模型,可以预测流场参数。与基于 CFD 的分析相比,ROM 可以在很短的时间内准确预测线性和非线性空气动力学过程,速度能够加快 1~2 个数量级^[2],因而在流场快速预测与实时控制中具有重要的应用价值。

根据是否将流动控制方程加入至模型,降阶模型可分为侵入式降阶模型和非侵入式降阶模型两类。侵入式降阶模型将本征正交分解 (proper orthogonal decomposition, POD) 得到的正交基通过伽辽金 (Galerkin) 投影的方式投影至流动控制方程上,以此得到由模态时间系数构建的低维模型,因此也称为 Galerkin 投影式降阶模型^[3]。由于考虑了控制方程,侵入式降阶模型能够对 N-S 方程中各物理项进行解释,进而定量分析出各项的作用大小。近年来,对 POD-Galerkin 降阶模型有较多应用研究。康伟等^[4]提出了一种利用 POD 的非线性 Galerkin 方法,用于复杂流体动力系统的低维建模,并以雷诺数为 200、攻角为 20° 时的 NACA0012 翼型绕流流动问题为例进行了低维建模分析。Aubry 等^[5]对湍流边界层过渡流动进行了建模,结果表明降阶模型捕捉到了实验观察到的流向涡对运动形态。Deane 等^[6]重构了周期性凹槽通道中的流动和孤立圆柱体的尾流,研究了模型的短期和长期精度,并对构建降

阶模型所用工况之外的工况点进行了测试,结果表明周期性凹槽中流动降阶模型在 Re 附近能够进行合理的外推。Noack 等^[7-8]对 Galerkin 模型进行了改进,引入了一种移位模态,使得 POD-Galerkin 降阶模型能够重构瞬态动力学过程,并以 3 阶动力学系统重构了 $Re = 100$ 的孤立圆柱绕流。张鸿志等^[9]以 AGARD 445.6 机翼为对象,研究了 ROM 建立过程中不同参数对于模型精度的影响,并将 ROM 应用于颤振边界的预测。李静等^[10]以低雷诺数下圆柱绕流为对象,构建失稳初期的流动 ROM,该模型可以复现流场发散初期的发生趋势。冯俞楷^[11]和梁钰^[12]对非稳态导热问题构建 ROM,给出了涡轮叶片瞬态非线性热传导问题的求解结果,该模型大大提高了计算速度,实现了快速预测。非侵入式降阶模型又称为数据驱动式降阶模型,它不需要给出明确的控制方程,直接从流场的高维流动数据中构建。非侵入式降阶模型可以通过输入、输出量直接建立线性或非线性黑盒模型^[13],也可以通过对流场测量数据建立简化流动模型,如代理模型^[14]、人工神经网络^[15]、非线性系统辨识^[16]等。非侵入式降阶模型凭借其模块化的优势^[17],在流场降阶模型研究中越来越受到研究者的关注。Duraismy 等^[18]、Saeed 等^[19]和 Reddy 等^[20]使用机器学习方法提高 CFD 模拟的准确性,以神经网络来预测流场不同流动条件和几何形状下的速度和压力场,相较于 CFD 能够更快地估计流场变化情况。

侵入式降阶模型通过将控制方程投影到低维的重构子空间上完成构建,因此对线性周期性流动非常有效,且保留了可解释性和可扩展性。但是,由于其各项系数直接取决于选取的模态,侵入式降阶模型在应用中仍具有较大的局限性,特别是在存在过渡状态的非定常流场中,固定的模态并不能很好地

表述各个时段的流体状态,即模态会发生形变^[21],由此会造成误差。在 POD-Galerkin 降阶模型中,由于方程中的模态截断和固有非线性,降阶模型不能代表完全相同的动力学系统,因此降阶模型获得的轨迹偏离了投影轨迹,其误差表示为 ϵ ,即全阶模型 u_{FOM} 与降阶模型 u_{ROM} 之差,具体如图 1 所示。误差 ϵ 可进一步被分解为两个主要的误差^[22]。①流场经过降阶后被约束在一个低维的子空间中,由 POD 截断的主要模态构建,而对于复杂的流场,少数几个模态不能够准确地表达真实的物理系统,进而会影响生成的降阶模型的精度。此误差在图 1 中表示为投影带来的误差 $\epsilon_{\Phi^\perp}$,可以看作是全阶模型 u_{FOM} 与投影后截断后的模型 $u_{\text{projection}}$ 之差。②由于固有的非线性,被截断的高阶模态与被保留的低阶模态之间存在相互作用,而 POD 截断忽略了这些相互作用的非线性项,经常导致解的数值不稳定性。这一误差在图 1 中表示为 ϵ_{Φ} ^[23],此部分误差为截断后的模型 $u_{\text{projection}}$ 与降阶模型截断后的模型 u_{ROM} 之差。针对上述问题,通常通过提高降阶模型阶数可以有效改善降阶模型的准确性,然而由于降阶模型的非线性项,提高阶数带来的计算复杂度为 $O(R_0^3)$, R_0 为降阶模型的阶数,这导致实际应用过程中不能无限制增大降阶模型的阶数。此外,由于流场中非线性项的相互作用,POD-Galerkin 降阶模型的系统矩阵随着阶数增加而逐渐病态,导致微小的数值误差也会造成模型失真。

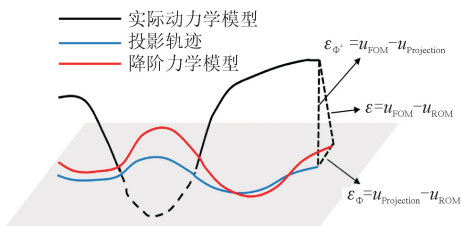


图 1 降阶模型中误差来源

Fig. 1 Error sources in reduced order models

针对上述 POD-Galerkin 降阶模型存在的误差,通过对模型进行修正,添加额外的作用项使得降阶模型预测轨迹与实际轨迹相符,是切实可行的方法^[24-25]。鉴于机器学习方法在提取特征方面的优势,其与流场降阶方法结合有更大的潜力。基于此,本文提出一种引入长短期记忆神经网络(long short-term memory, LSTM)^[26]的改进 POD-Galerkin 降阶模型。该模型通过 Galerkin 投影来提高降阶模型的可解释性,并通过两个不同的长短期记忆神经网络分别进行大尺度模态的误差修正和小尺度模态的阶数扩展。将改进的 POD-Galerkin 降阶模

型应用于典型的二维圆柱绕流问题的流动预测,通过与标准 POD-Galerkin 降阶模型的对比,以验证改进降阶模型的有效性和可靠性。

1 引入神经网络的改进 POD-Galerkin 降阶模型

1.1 POD-Galerkin 降阶模型

POD-Galerkin 降阶模型可将高阶的偏微分方程组转化为低阶的常微分方程组,其在流场降阶中应用的基本思路是:将数值模拟或实验得到的流场参数作为样本数据,采用 POD 方法^[27]得到描述流场的一组最佳正交模态,并对低能量模态进行截断,然后将 N-S 方程投影到主要模态上,得到关于模态系数的一组常微分方程组,从而将高阶问题转化为低阶非线性动力学问题。具体建模过程如下。

对于流场数据 $U(x, t)$,将每个时刻的流场构成一系列数据,选取样本库中 N 个时刻的数据作为样本,构建流场快照矩阵

$$U = \begin{bmatrix} U_1^1 & U_1^2 & \cdots & U_1^N \\ U_2^1 & U_2^2 & \cdots & U_2^N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_m^1 & U_m^2 & \cdots & U_m^N \end{bmatrix} \quad (1)$$

通过本征正交分解,可以将流场快照分解为平均场 $\bar{U}$ 和多个正交的模态的组合

$$U(t, x_k) = \bar{U} + \sum_{i=1}^m a_i(t) \Phi_i(x_k), \quad k = 1, \dots, m \quad (2)$$

式中: a_i 为第 i 阶 POD 模态时间系数。

对于不可压 N-S 方程,在截取的前阶特征模态上作 Galerkin 投影。投影通过 N-S 方程与 POD 模态内积得到,表示为

$$\left(\Phi_i, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{u}) + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{u} \right) = 0 \quad (3)$$

式中: $\mathbf{u}$ 为速度矢量; p 为压力; ν 为运动黏度; $(\cdot)$ 为内积运算符。由此可得 m 个常微分方程构成的常微分方程组

$$\dot{a}_m(t) = A_k + \sum_{m=1}^M B_{km} a_m(t) + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M C_{kmn} a_m a_n \quad (4)$$

式中: A_k 、 B_k 、 C_k 均为常数项,可以由速度场、速度场梯度项、压力场、压力场梯度项的组合求得。由格林定理和无散度的性质可知,在出口边界 $p = 0$ 的情况下,压力项可以消去。通过求解上述常微分方程组,即可获得各阶模态时间系数的变化趋势,与

POD 空间模态结合,可以重构原始流场。

1.2 神经网络的引入

针对标准 POD-Galerkin 降阶模型存在的两个主要误差来源,可以分别添加神经网络项来提高降阶模型的精度。对于第一个误差来源,对流场进行 POD 后,对高阶模态进行截断忽略了高阶模态在流场中的耗散作用,保留的低阶模态失去了与高阶模态的耦合项,使得耗散误差不断累积,会影响构建的动力系统的长期稳定性。因此,可以通过 POD 分解得到的时间系数与构建的降阶动力学系统误差引入长短期记忆神经网络^[28],建立输入-输出关系,以此修正降阶模型与实际预测值之间的偏差。

定义实际的动力学系统模型

$$\frac{da_k}{dt} = F(a_k) \quad (5)$$

从实际动力学系统中可以求得变量 a_k 随时间变化的离散值 $a_k(t_1), a_k(t_2), \dots, a_k(t_n)$ 等。

假设降阶动力学系统模型为

$$\frac{d\tilde{a}_k}{dt} = G(\tilde{a}_k) \quad (6)$$

对此动力学模型,通过求解线性微分方程组可以得到下一时刻的时间系数

$$\tilde{a}_k(t_{n+1}) = \tilde{a}_k(t_n) + \Delta t \sum_{q=0}^s \beta_q G(\tilde{a}_k(t_{n-q})) \quad (7)$$

从式(7)计算出 $\tilde{a}_k(t_{n+1})$ 之后,在求解下一个时间步前,可以引入修正项,即

$$c_k(t_n) = a_k(t_n) - \tilde{a}_k(t_n) \quad (8)$$

式中: c_k 为降阶模型预测值和真实投影之间的误差。为修正此误差,可以利用 LSTM 架构来学习矫正项,在每个时间步内, LSTM 神经网络将模态系数从降阶模型的预测值引导至真实值上。

第二个误差主要由投影截断导致的高阶模态被舍弃所致,高阶模态代表流场中小尺度的流场结构。假定初始降阶模型截断的阶数为 R ,可以将降阶模型的阶数扩展至 $Q(Q > R)$,并通过训练第二个 LSTM 神经网络来预测额外扩展的 $(Q-R)$ 阶模态系数,即将 LSTM 的输入作为 $a_k(t_n)_{k=1}^R$,输出为 $a_k(t_n)_{k=R+1}^Q$ 。因此,分别对应于改进两个方面误差的 LSTM 映射 f 和 g 可以写为

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_1(t-n) & \cdots & \tilde{a}_1(t) \\ \tilde{a}_2(t-n) & \cdots & \tilde{a}_2(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{a}_R(t-n) & \cdots & \tilde{a}_R(t) \end{bmatrix} \xrightarrow{f} \begin{bmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_R(t) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} a_1(t-n) & \cdots & a_1(t) \\ a_2(t-n) & \cdots & a_2(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_R(t-n) & \cdots & a_R(t) \end{bmatrix} \xrightarrow{g} \begin{bmatrix} a_{R+1}(t) \\ a_{R+2}(t) \\ \vdots \\ a_Q(t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

综上所述可知,整个神经网络修正过程包括两个阶段,首先通过第一个 LSTM 神经网络映射来减小第一部分误差,然后通过第二个 LSTM 神经网络扩展模态阶数来减小第二部分误差。引入神经网络的改进 POD-Galerkin 降阶模型的计算流程如图 2 所示。

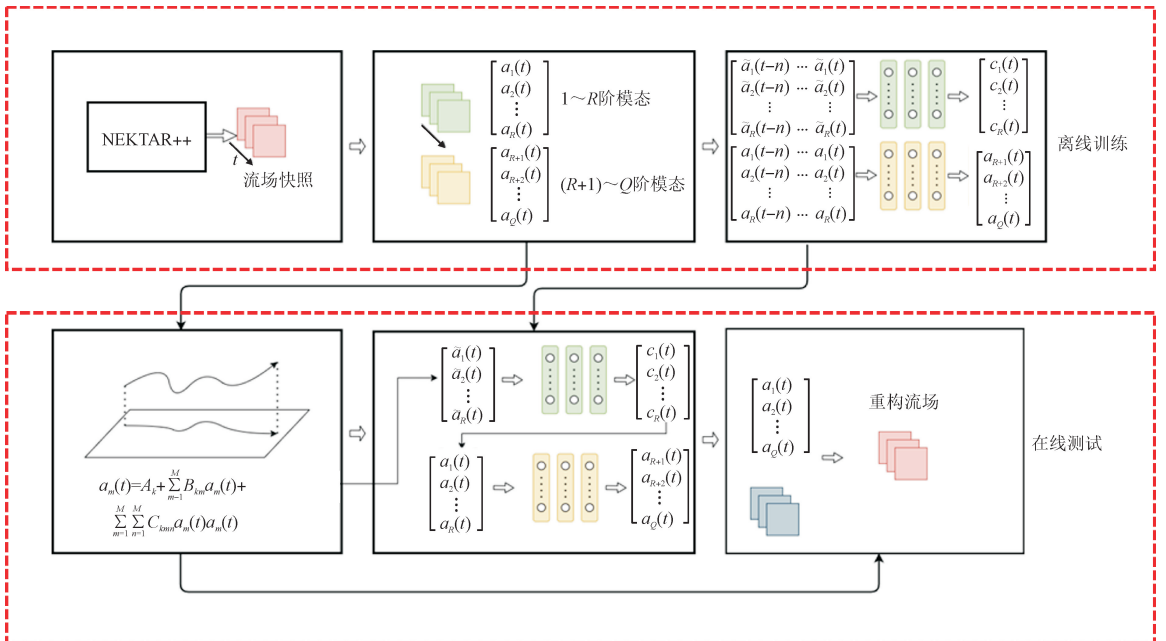


图 2 改进 POD-Galerkin 降阶模型流程

Fig. 2 Flowchart of improved POD-Galerkin reduced order model

离线训练期间,模型在不同时间节点获得真实的流场信息,进而可以计算得到真实的 POD 模态时间系数。首先通过标准 POD-Galerkin 降阶模型逐步计算每个时间步长的模态系数,然后计算 f 和 g 两个 LSTM 项。

在线测试期间,首先从时间零点开始,将当前时刻的流场快照投影到前 R 阶模态上获得初始时刻的模态时间系数,然后通过标准 POD-Galerkin 降阶模型进行第一个时间步长的计算。得到第一个时间步长上的模态时间系数后,通过 LSTM 修正项 f 计算得到预期的误差 c_k ,再进行第一次的修正,随后通过 LSTM 扩展项 g 计算得到扩展模态时间系数,利用两个部分得到的模态时间系数以及保留的前 Q 阶静态空间流场模态,即可得到高精度的预测流场。

2 改进 POD-Galerkin 降阶模型的应用

将提出的引入神经网络修正的改进 POD-Galerkin 降阶模型应用于典型二维圆柱绕流问题的流场预测。研究对象为 $Re=100$ 条件下圆柱绕流,其来流马赫数较小($Ma<0.1$),可以视作不可压缩流动,且传热较小可以忽略,因此在进行数值模拟时仅考虑质量守恒方程和动量方程

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (12)$$

本文利用 NEKTAR++ 软件对圆柱绕流进行直接数值模拟,利用 hp 型谱元法直接对流场控制方程组进行求解,求解方法采用经典伽辽金公式与谱元离散相结合的高阶有限元方法,对每个网格单元内部的节点值通过 Gauss-Lobatto-Legendre 多项式的拉格朗日展开来近似。

圆柱绕流的计算区域如图 3 所示。将圆柱直径 D 作为无量纲处理的特征长度,取 $D=1$,圆柱圆心位于原点,入口和出口边界位于 $x=-10D$ 和 $x=20D$ 处,垂直于流向方向长度为 $-10D \sim 10D$ 。进口速度采用无穷远来流速度进行无量纲处理。

圆柱绕流的流场网格如图 4 所示,进口采用均匀速度进口,出口采用自由流出口,用以消除尾迹的影响,圆柱壁面采用无滑移边界。上下边界采用对称边界,以避免壁面对圆柱的影响。在圆柱附近进行网格加密处理,最终的网格节点总数为 31 360。

根据边界条件进行非定常计算,待尾迹稳定振荡后采样 20 个周期的流场数据。定义升力系数 C_l 、

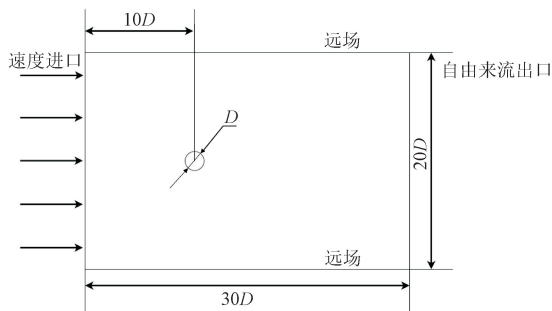


图 3 圆柱绕流计算域

Fig. 3 Computational domain of flow around a cylinder

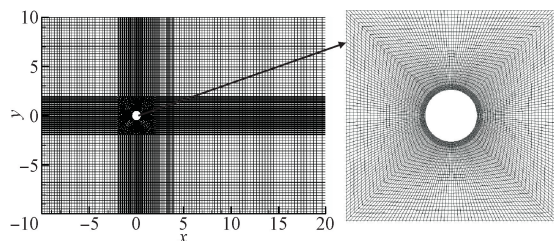


图 4 圆柱绕流的流场网格划分及局部加密图

Fig. 4 Computational mesh and grid refinement near the cylinder surface

阻力系数 C_d 及斯特劳哈尔数 St 为

$$C_l = \frac{F_l}{0.5\rho U_{inlet}^2} \quad (13)$$

$$C_d = \frac{F_d}{0.5\rho U_{inlet}^2} \quad (14)$$

$$St = \frac{fD}{U_{inlet}} \quad (15)$$

式中: F_l 为圆柱所受到的升力; F_d 为圆柱所受到的阻力; ρ 为流体密度; U_{inlet} 为进口速度。

将本文数值模拟得到的 C_l 、 C_d 及 St 与文献数据进行对比,结果如表 1 所示。可以看出,本文数值模拟结果与文献结果吻合较好,本文所采用的数值方法的准确性得到了验证。

表 1 升、阻力系数及 St 与文献数据对比

Table 1 Comparison of lift coefficient, drag coefficient and St number with bibliography results

来源	C_l 最大幅值	C_d 时均值	St
本文	0.325	1.330	0.166 0
文献[29]	0.335	1.330	0.165 0
文献[30]	0.322	1.320	0.164 0
文献[31]	—	1.318	0.164 0
文献[32]	0.326	1.322	0.164 4
文献[33]	0.323	1.320	0.166 0
文献[34]	0.328	1.325	0.164 4

3 结果与讨论

对周期性流场中 1 000 个流场快照进行 POD,并分别构建 4、6、8 阶流场降阶模型。不同阶数下的预测前两阶 POD 模态时间系数(a_1 、 a_2)及预测系数 a_1 与 POD 的绝对误差如图 5 所示。

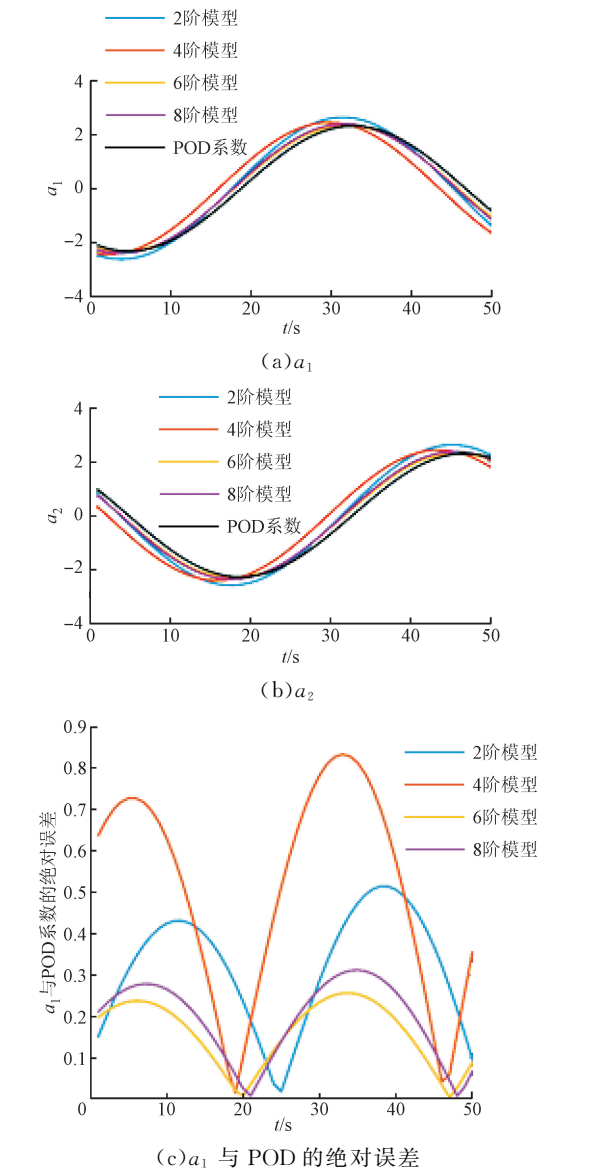


图 5 不同阶数降阶模型前两阶模态及误差对比
Fig. 5 Comparison of the first two modes and errors of reduced order models with different ROM orders

从图 5 可以看出,起初随着阶数增大,各阶模态时间系数的预测精度逐渐提高。但是,提高至 8 阶后,误差反而有所增大。这是由于构建的动力学系统中,微分方程中多项式系数由模态投影得到。由于对空间进行离散,数值误差随着多项式系数矩阵大小不断增加,数值误差积累超过了提高阶数带来的改进,因此不断提高降阶模型的阶数并不能使得

精度一直增大。此外,对比误差随时间变化的趋势可以看出,对于 2、4 阶的降阶模型,模态时间系数随时间逐渐增大,有无限发散的趋势,且由于预测周期与实际周期有差别,导致相位误差逐渐累积。对于 6、8 阶的降阶模型,模态时间系数没有逐渐增大,但是相位误差同样在不断累计,这都导致了误差随时间不断增大。

分别以 2、4、6、8 阶模型为基准,对 POD 模态时间系数进行修正,LSTM 神经网络的参数如表 2 所示。

表 2 LSTM 超参数列表

参数	数值或设置	
	引入修正项的神经网络	引入扩展项的神经网络
隐藏层数	3	3
节点数	56	80
优化器	Adam	Adam
激活函数	Tanh	Tanh
损失函数	MSE	MSE
单次训练样本数	64	64
训练步数	800	800
学习率	0.001	0.001
一阶矩衰减率	0.9	0.9
二阶矩衰减率	0.999	0.999

将训练好的模型添加到 POD-Galerkin 降阶模型当中,重新进行模态时间系数的计算,即可得到通过神经网络修正的降阶模型数据。图 6~9 展示了 4 个不同修正模型和原始 POD-Galerkin 降阶模型的前两阶 POD 模态时间系数的对比情况。可以看出,通过神经网络修正后,降阶模型预测的模态时间系数基本与实际值一致,误差也没有逐渐增大的趋势。图 8 中,第 5 阶模态相较其他各阶模态误差较大。这是由于给定神经网络训练的均方根误差目标是使得各阶模态的误差之和最小,第 5 阶模态的修正项并未收敛到局部最优的修正参数。

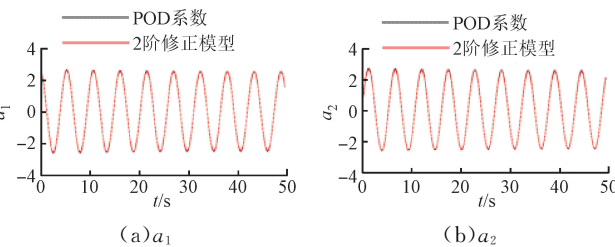


图 6 2 阶修正模型预测 POD 系数
Fig. 6 Predicting POD coefficients using 2-order modified model

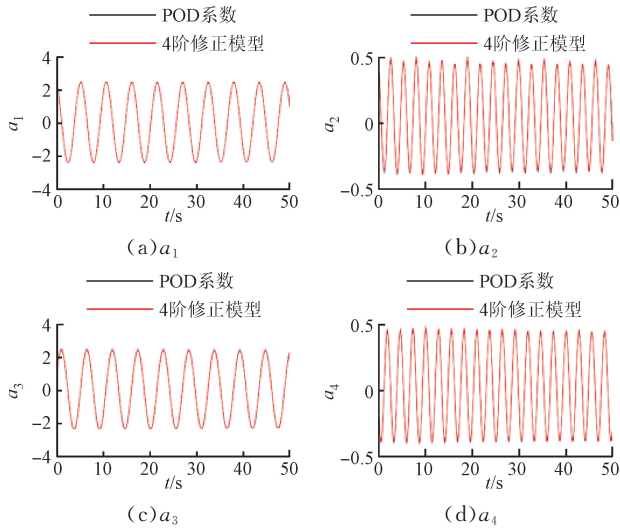


图 7 4 阶修正模型预测 POD 系数

Fig. 7 Predicting POD coefficients using 4-order modified model

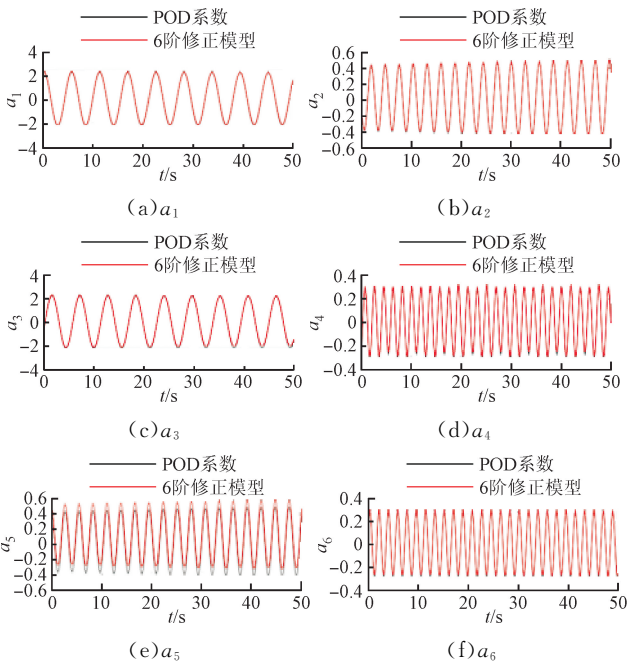


图 8 6 阶修正模型预测 POD 系数

Fig. 8 Predicting POD coefficients using 6-order modified model

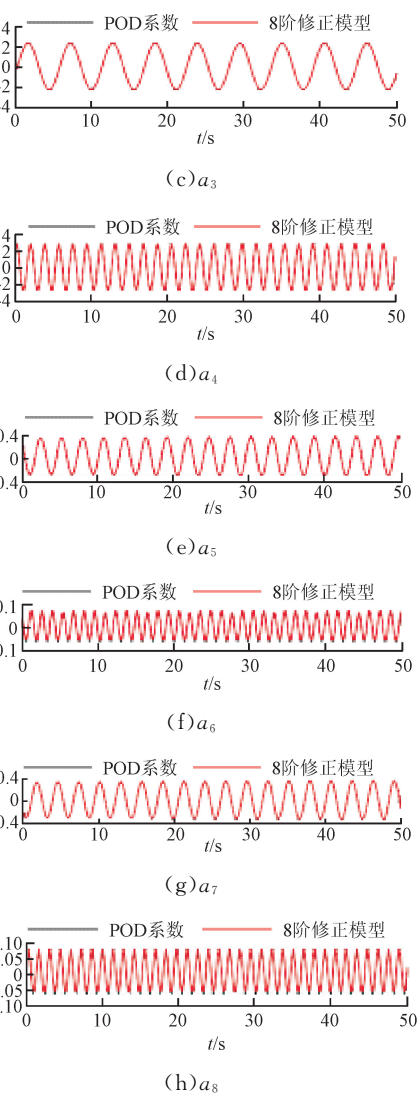
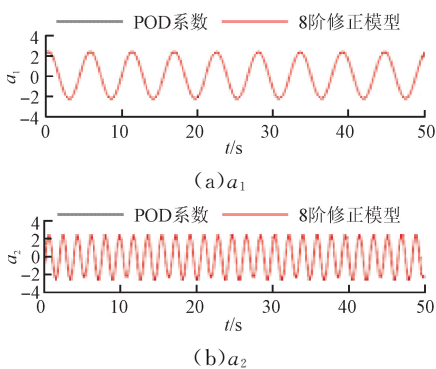
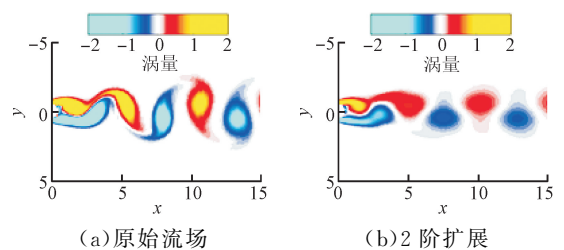


图 9 8 阶修正模型预测 POD 系数

Fig. 9 Predicting POD coefficients using 8-order modified model

对通过神经网络修正后的降阶模型进行扩展,将 2、4、6 阶降阶模型分别扩展至 8 阶。将预测的高阶模态时间系数加入流场重构当中,不同扩展阶数的改进降阶模型预测流场与原始流场的涡量(经过无量纲化处理)对比如图 10 所示。可以看出,将 2 阶模态扩展至 8 阶,预测流场误差较大,而 4 阶模态扩展与 6 阶模态扩展至 8 阶几乎没有差别,得到的预测流场与原始流场基本一致。



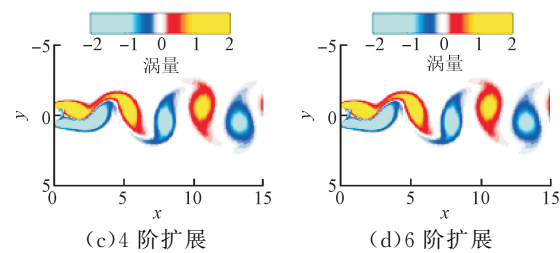


图 10 预测流场涡量对比
Fig. 10 Comparison of vorticity contour of reconstructed flow field

定义各阶模态时间系数的均方根误差为

$$\epsilon_{\text{RMSE}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^T (a_i - \hat{a}_i)^2}{T}}$$

(16)

式中: T 为总时间步数; $\hat{a}_i$ 为预测模态时间系数。

各阶模态时间系数均方根误差如表 3 所示。各阶模态的时间系数预测与原始数据相比, POD-Galerkin 降阶模型在前 6 阶模态的预测精度较高, 而第 7 阶模态的时间系数有较大的相位误差。改进后模型各阶模态的均方根误差均较 POD-Galerkin 降阶模型要小 1~2 个数量级。相较于引入修正项的神经网络, 引入扩展项的神经网络预测效果较差, 但随着阶数的增大, 引入扩展项神经网络模型的预测精度逐渐提高。

表 3 各阶模态时间系数均方根误差

Table 3 Root mean square error of time coefficients for each mode

模态 阶数	时间系数均方根误差/ 10^{-5}				
	8 阶 POD- Galerkin	2 阶修 正+6 阶 扩展	4 阶修 正+4 阶 扩展	6 阶修 正+2 阶 扩展	8 阶 修正
1	205	0.946 1	1.568 9	1.296 6	0.957 8
2	237	1.173 4	1.003 8	0.673 0	0.933 2
3	486	11.192 6	0.096 9	1.254 0	0.093 8
4	248	10.078 8	0.119 0	1.464 9	0.091 4
5	116	18.382 5	2.054 6	1.257 9	1.050 0
6	115	15.263 0	8.013 9	1.853 1	1.030 0
7	1 528	21.147 5	5.762 3	3.618 3	1.680 0
8	858	41.874 5	7.819 4	2.046 8	0.750 0

表 4 展示了不同降阶模型计算迭代一个时间步耗费的时间。可以看出, 标准 POD-Galerkin 降阶模型的计算时间随模态阶数的增大而显著增大。由于改进模型已经在训练阶段构建完成, 所以添加不同的改进模型带来的时间增长近乎一致。4 阶和 6 阶改进降阶模型相较于原始 8 阶 POD-Galerkin 模型速度分别提高了约 56% 和 25%。

表 4 不同模型计算时间对比

Table 4 Comparison of calculation time between different models

模型	计算时间/s
2 阶 Galerkin 模型	0.243 7
4 阶 Galerkin 模型	0.321 1
6 阶 Galerkin 模型	0.625 7
8 阶 Galerkin 模型	0.973 6
2 阶修正+6 阶扩展	0.265 1
4 阶修正+4 阶扩展	0.341 4
6 阶修正+2 阶扩展	0.650 1

4 结 论

本文利用两个长短期记忆神经网络建立了从 POD-Galerkin 降阶模型到实际 POD 模态时间系数之间的修正映射以及低阶模态时间系数与高阶模态时间系数之间的扩展映射, 通过修正映射和扩展映射分别消除标准 POD-Galerkin 降阶模型误差累积和扩展降阶模型阶数, 构建了改进的 POD-Galerkin 降阶模型。将改进模型应用于二维圆柱绕流的流场预测, 对模型的精度和计算时间进行了对比分析。本文主要研究结论如下。

(1)改进的 POD-Galerkin 降阶模型是数据驱动和物理驱动的混合模型,其在保留侵入式降阶模型的物理背景及可解释性的情况下,利用长短期记忆神经网络进行修正和扩展,通过 Galerkin 投影框架、LSTM 修正和 LSTM 扩展共 3 个层次准确描述流场变化。

(2)添加长短期记忆神经网络修正后的降阶模型与标准 POD-Galerkin 降阶模型相比更为准确。在相同阶数的降阶模型中,修正后的降阶模型更贴近实际 POD 结果,修正后模型各阶模态的均方根误差均较标准 POD-Galerkin 降阶模型要小 1~2 个数量级。

(3)添加长短期记忆神经网络扩展项后的改进降阶模型在与高阶 POD-Galerkin 降阶模型预测精度相近的情况下,改进降阶模型的计算时间要显著小于原始相同阶数的标准 POD-Galerkin 降阶模型。在精度基本不变的情况下,4 阶和 6 阶改进降阶模型的计算速度相较于 8 阶标准 POD-Galerkin 降阶模型分别提高了约 56% 和 25%。

参考文献:

[1] DOWELL E H. Eigenmode analysis in unsteady aerodynamics: reduced-order models [J]. AIAA Journal,

- 1996, 34(8): 1578-1583.
- [2] VENEZIANI A. Certified reduced basis methods for parametrized partial differential equations [J]. SIAM Review, 2017, 59(1): 219-223.
- [3] WYNN A, PEARSON D S, GANAPATHISUBRAMANI B, et al. Optimal mode decomposition for unsteady flows [J]. Journal of Fluid Mechanics, 2013, 733: 473-503.
- [4] 康伟, 张家忠, 李凯伦. 利用本征正交分解的非线性 Galerkin 降维方法 [J]. 西安交通大学学报, 2011, 45(11): 58-62, 67.
- KANG Wei, ZHANG Jiazhong, LI Kailun. Nonlinear Galerkin method for dimension reduction using proper orthogonal decomposition [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2011, 45(11): 58-62, 67.
- [5] AUBRY N, HOLMES P, LUMLEY J L, et al. The dynamics of coherent structures in the wall region of a turbulent boundary layer [J]. Journal of Fluid Mechanics, 1988, 192: 115-173.
- [6] DEANE A E, KEVREKIDIS I G, KARNIADAKIS G E, et al. Low-dimensional models for complex geometry flows: application to grooved channels and circular cylinders [J]. Physics of Fluids: A Fluid Dynamics, 1991, 3(10): 2337-2354.
- [7] NOACK B R, AFANASIEV K, MORZYŃSKI M, et al. A hierarchy of low-dimensional models for the transient and post-transient cylinder wake [J]. Journal of Fluid Mechanics, 2003, 497: 335-363.
- [8] SCHLEGEL M, NOACK B R. On long-term boundedness of Galerkin models [J]. Journal of Fluid Mechanics, 2015, 765: 325-352.
- [9] 张鸿志, 周强, 陈刚, 等. 气动弹性系统本征正交分解降阶模型精度的参数影响研究 [J]. 西安交通大学学报, 2016, 50(11): 104-109.
- ZHANG Hongzhi, ZHOU Qiang, CHEN Gang, et al. Effects of some parameters on the accuracy of aeroelastic proper orthogonal decomposition reduced order model [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2016, 50(11): 104-109.
- [10] 李静, 张伟伟, 李新涛. 失稳初期的低雷诺数圆柱绕流 POD-Galerkin 建模方法研究 [J]. 西北工业大学学报, 2015, 33(4): 596-602.
- LI Jing, ZHANG Weiwei, LI Xintao. Researching method of building flow field of initial development stage of low Reynolds number flow past a circular cylinder [J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2015, 33(4): 596-602.
- [11] 冯俞楷. POD 降维算法在传热与流动数值模拟中的应用 [D]. 北京: 华北电力大学(北京), 2017.
- [12] 梁钰. 基于自由单元法的瞬态非线性热传导问题模型降阶及参数辨识方法研究 [D]. 大连: 大连理工大学, 2021.
- [13] KING R, BECKER R, FEUERBACH G, et al. Adaptive flow control using slope seeking [C]//2006 14th Mediterranean Conference on Control and Automation. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2006: 1-6.
- [14] TIMME S, MARQUES S, BADCOCK K J. Transonic aeroelastic stability analysis using a Kriging-based Schur complement formulation [J]. AIAA Journal, 2011, 49(6): 1202-1213.
- [15] LUI H F S, WOLF W R. Construction of reduced-order models for fluid flows using deep feedforward neural networks [J]. Journal of Fluid Mechanics, 2019, 872: 963-994.
- [16] BRUNTON S L, PROCTOR J L, KUTZ J N. Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2016, 113(15): 3932-3937.
- [17] AHMED S E, RAHMAN S M, SAN O, et al. Memory embedded non-intrusive reduced order modeling of non-ergodic flows [J]. Physics of Fluids, 2019, 31(12): 126602.
- [18] BHATNAGAR S, AFSHAR Y, PAN Shaowu, et al. Prediction of aerodynamic flow fields using convolutional neural networks [J]. Computational Mechanics, 2019, 64(2): 525-545.
- [19] SAEED A, FAROOQ H, AKHTAR I, et al. Deep learning-based reduced-order model for turbulent flows [C]//2022 19th International Bhurban Conference on Applied Sciences and Technology (IBCAST). Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2022: 821-829.
- [20] BUKKA S R, GUPTA R, MAGEE A R, et al. Assessment of unsteady flow predictions using hybrid deep learning based reduced-order models [J]. Physics of Fluids, 2021, 33(1): 013601.
- [21] SHAMAI M, DAWSON S T M, MEZIC I, et al. Unsteady dynamics in the streamwise-oscillating cylinder wake for forcing frequencies below lock-on [J]. Physical Review Fluids, 2021, 6(7): 074702.
- [22] MENDONÇA G, AFONSO F, LAU F. Model order reduction in aerodynamics: review and applications [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers: Part G Journal of Aerospace Engineering, 2019, 233(15): 5816-5836.
- [23] LASSILA T, MANZONI A, QUARTERONI A, et

- al. Model order reduction in fluid dynamics: challenges and perspectives [M]//QUARTERONI A, ROZZA G. *Reduced Order Methods for Modeling and Computational Reduction*. Cham, Germany: Springer International Publishing, 2014: 235-273.
- [24] RAHMAN S M, AHMED S E, SAN O. A dynamic closure modeling framework for model order reduction of geophysical flows [J]. *Physics of Fluids*, 2019, 31(4): 046602.
- [25] KANI J N, ELSHEIKH A H. Reduced-order modeling of subsurface multi-phase flow models using deep residual recurrent neural networks [J]. *Transport in Porous Media*, 2019, 126(3): 713-741.
- [26] BRUNTON S L, NOACK B R, KOUMOUTSAKOS P. Machine learning for fluid mechanics [J]. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2020, 52(1): 477-508.
- [27] LUMLEY J L. *Stochastic tools in turbulence* [M]. Burlington, VT, USA: Elsevier Science, 1970.
- [28] PAWAR S, SAN O, NAIR A, et al. Model fusion with physics-guided machine learning: projection-based reduced-order modeling [J]. *Physics of Fluids*, 2021, 33(6): 067123.
- [29] PARK J, KWON K, CHOI H. Numerical solutions of flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 160 [J]. *KSME International Journal*, 1998, 12(6): 1200-1205.
- [30] SADOVNICHII V A, DUBROVSKII V V, KADCHENKO S I, et al. The calculation of eigenvalues of problem for hydrodynamic stability of current of viscous fluid between two rotational cylinders with little numbers of Reynolds [J]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1998, 363(6): 748-750.
- [31] ZHANG Chaoying, SHI Juan, TAN Huili, et al. Sedimentation of a single charged elliptic cylinder in a Newtonian fluid by lattice Boltzmann method [J]. *Chinese Physics Letters*, 2004, 21(6): 1108.
- [32] MITTAL S. Excitation of shear layer instability in flow past a cylinder at low Reynolds number [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2005, 49(10): 1147-1167.
- [33] STÅLBERG E, BRÜGER A, LÖTSTEDT P, et al. High order accurate solution of flow past a circular cylinder [J]. *Journal of Scientific Computing*, 2006, 27(1): 431-441.
- [34] POSDZIECH O, GRUNDMANN R. A systematic approach to the numerical calculation of fundamental quantities of the two-dimensional flow over a circular cylinder [J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2007, 23(3): 479-499.

(编辑 陶晴)